

Wiskunde Bacc

Victor Telea

2024-2025

Contents

0	Introductie	1
1	Functionies	2
1.1	Analyse van functies (Sem-1 S6)	2
1.2	Limieten (Sem-1 S6)	3
1.3	Afgeleiden (Sem-2 S6)	3
1.4	Toepassingen van limieten en afgeleiden (Sem-2 S6)	4
1.5	Exponentiële en logaritmische functies (Sem-2 S6)	5
1.6	Reële functies (Sem-1 S7)	5
1.7	Integralen (Sem-2 S7)	6
2	Complexe getallen	9
2.1	Complexe getallen (Sem-1 S6)	9
2.2	Complexe getallen (Sem-1 S7)	9
3	Kansrekenen	11
3.1	Combinatoriek - Telproblemen (Sem-1 S6)	11
3.2	Kansrekenen (Sem-1 S6)	11
4	Analytische meetkunde	12
4.1	Vlakke meetkunde (Sem-2 S6)	12
4.2	Ruimte Meetkunde (Sem-1 en 2 S7)	13
5	Rijen	15
5.1	Rijen (Sem-2 S6)	15
5.2	Rekenkundige en Meetkundige rijen (Sem-1 S7)	15
6	Statistiek (geen wiskunde)	16
6.1	Discrete Kansmodellen (Sem-2 S6)	16
6.2	Bivariate Statistiek (Sem-1 S7)	16
6.3	Continue Kansmodellen (Bijna wiskunde) (Sem-2 S7)	18
7	Extra	20

0 Introductie

Het belangrijkste punt van deze samenvatting is mijn neiging om uit te stellen wanneer het aankomt op het studeren van andere vakken. De hoofdstukken worden niet in chronologische volgorde gepresenteerd, maar op een manier die ik het meest logisch vond in relatie tot de theoretische structuur.

Deze samenvatting bevat de volledige theoretische inhoud van S6 tot S7, inclusief de belangrijkste definities. Oefeningen zijn bewust weggelaten, en slechts een beperkte selectie van oplossingsmethoden—zoals technieken met integralen of analytische geometrie—zijn opgenomen. Basisconcepten van trigonometrie en algebra zijn eveneens weggelaten om de samenvatting kort en gefocust te houden.

In sommige gevallen is de uitleg van definities misschien iets te gedetailleerd—meer dan de Baccalaureaat waarschijnlijk vereist—maar ik heb ze toegevoegd voor de volledigheid en, toegegeven, een zekere liefde voor wiskundige precisie.

Als je vragen, opmerkingen of suggesties hebt over de inhoud (of wiskunde in het algemeen), laat het me dan gerust weten.

1 Functies

1.1 Analyse van functies (Sem-1 S6)

Definitie: Functie

Een functie is een relatie tussen twee verzamelingen waarbij elk element van de eerste precies één beeld heeft in de tweede. Symbolisch: $f : A \rightarrow B$, met **functievoorschrift** $f(x) \in B$ voor alle $x \in A$.

Terminologie:

- Domein: $\text{dom} f$, verzameling invoerwaarden van f (A).
- Bereik: $\text{ber} f$, verzameling functiewaarden van f (B).
- Nulwaarde: $f(x) = 0 \implies x$ is een nulwaarde.
- Snijpunten met assen: $S_x = (\dots, 0)$ en $S_y = (0, \dots)$.
- $f(x) = f(-x) \implies f$ is Even
- $f(-x) = -f(x) \implies f$ is Oneven (f kan ook geen van beide zijn)

Verloopschema:

- Stijgen: ↗
- Dalen: ↘
- Extreme waarden: Max/Min

Tekenschema:

- $f(x) > 0 \implies +$
- $f(x) < 0 \implies -$
- $f(x) = 0 \implies 0$

Voor het verloopschema gebruik je de eerste afgeleide ($f'(x)$) en eventueel de tweede ($f''(x)$). Terwijl voor het tekenschema de nulpunten van f nodig zijn

Soorten functies (Van al deze moet men de nulpunten kunnen vinden) Het domein is meestal $\mathbb{R}$, maar bij **even** wortelmachten moeten altijd positief zijn, elders ligt het **niet** in het domein.

- Veeltermen: $\sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. (*Hornerschema* soms nodig voor nulpunten.)
- Rationale functies: $\frac{g(x)}{h(x)}$ (Noemer $\neq 0$, nulpunten van h horen **niet** bij het domein (perforaties of verticale asymptoten)).
- Irrationale functies: Wortelfuncties
- Exponentiële functies (Later in 1.5).
- Logaritmische functies (Later in 1.5).
- Goniometrische functies: $a \sin(b(x-c)) + d$:
 - Amplitude: a .
 - Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$.
 - Evenwichtslijn: $y = d$.
 - Mogelijk startpunt: (c, d) .
 - (De som en verschulformules kunnen ook handig zijn)

Bewerkingen met functies:

- $f + g$: Som van functies.
- $f - g$: Verschil van functies.
- $f \cdot g$: Vermenigvuldiging van functies.
- $\frac{f}{g}$: Deling van functies ($g(x) \neq 0$).
- f^{-1} : Inverse van f (mits f omkeerbaar is).
- $f \circ g$: Samenstelling van f en g , $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Transformaties: $a \cdot f(b(x-c)) + d$

- $a > 1$: Verticale uitrekking; $0 < a < 1$: Verticale inkrimping; $a < 0$: Spiegelning t.o.v. de x -as.
- $b > 1$: Horizontale versmalling; $0 < b < 1$: Horizontale verbreding; $b < 0$: Spiegelning t.o.v. de y -as.
- $c > 0$: Verplaatsing naar rechts; $c < 0$: Verplaatsing naar links.
- $d > 0$: Verplaatsing omhoog; $d < 0$: Verplaatsing omlaag.

1.2 Limieten (Sem-1 S6)

Definitie: Limieten

De limiet van $f(x)$ bij $x \rightarrow a$ wordt gedefinieerd als de waarde die $f(x)$ nadert wanneer x naar a nadert:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

- Rechterlimiet: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- Linkerlimiet: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
- Als $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ dan bestaat $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ niet.

De rekenregels van een limiet **zonder** een onbepaaldheid zijn intuïtief en worden gedaan zoals in $\mathbb{R}$. (Inclusief triviale regels met ∞ zoals $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a + \infty = \infty$.)

Onbepaaldheden: $\infty - \infty, \infty \cdot 0, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

Technieken/Regels:

- Bij $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ van een veelterm, mag je alles behalve de hoogste macht term schrappen.
- $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{x}{a} = \pm\infty$: het teken hangt af van het tekenschema, en is daarvan af te lezen.
- $\pm \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{0} \vee \frac{\infty}{\infty}$: deel door $(x-a)$ noemer en teller.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \infty - \infty$ creëer een product of quotiënt.
- Bij irrationale elementen probeer in het algemeen te vereenvoudigen.

1.3 Afgeleiden (Sem-2 S6)

Gemiddelde helling: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Algemene formule voor raaklijnen: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

Definitie: Afgeleiden

$f'(x)$ is de functie die de ogenblikkelijke verandering van $f(x)$ beschrijft. M.a.w., het geeft de snelheid waarmee de waarden van $f(x)$ veranderen ten opzichte van x . Formeel is de definitie als volgt:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \vee f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Met de definities behalen we de volgende formules (sommige van deze moet je ook zelf kunnen bewijzen.):

- $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Er volgen ook de volgende regels:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(r \cdot f)' = r \cdot f' \quad r \in \mathbb{R}, \text{ oftewel } r \text{ is een constante.}$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ (Productregel)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ (Quotiëntregel)
- $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Kettingregel)

1.4 Toepassingen van limieten en afgeleiden (Sem-2 S6)

Definitie: Asymptoot

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \implies x = a \text{ is een asymptoot.}$$

- $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ stijgt op punt a
- $f'(a) = 0 \Rightarrow f(x)$ is constant op punt a , a is een lokale extrema of een buigpunt
- $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ daalt op punt a
- $f''(a) > 0 \Rightarrow f(x)$ is hol op punt a
- $f''(a) = 0 \Rightarrow f(x)$ heeft een buigpunt of een extrema in a
- $f''(a) < 0 \Rightarrow f(x)$ is bol op punt a

Belangrijk: Bij de gevallen $f'(a) = 0$ en $f''(a) = 0$ moet je de waardes rond a in een tekenschema bekijken om juist te bepalen wat er zich op punt a afspeelt.

Het is belangrijk dat de volgende elementen bepaald kunnen worden voor een functie:

- Domein en Bereik
- Nulpunten en Snijpunt van y-as
- Pariteit
- Asymptoten
- Perforaties
- Tekenschema en Verloopschema

Asymptoten

- HA vind je door $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ te bepalen
- VA bestaan als er een nulpunt vaker in de noemer staat dan in de teller
- Als er een noemer evenveel keer of meer keer in de teller staat als in de noemer is er een perforatie
- Bij logaritmen heb je ook de triviale VA

Extrema-problemen Deze zijn makkelijk te oplossen door een formule te vormen, en de afgeleide te nemen om het extrema te vinden.

Toepassingen in de Fysica: $a''(t) = v'(t) = s(t)$ (Respectief: Acceleratie, snelheid, en afstand.)

1.5 Exponentiële en logaritmische functies (Sem-2 S6)

Bestaan-voorwaardes logaritme: $\log_b(f(x)) \implies b > 0, b \neq 1, f(x) > 0$

Afgeleiden:

- $\frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x) \ln(a)$
- $\frac{d}{dx} \log_a(f(x)) = \frac{f'(x)}{\ln(a)f(x)}$

Exponentiële Vergelijkingen en ongelijkheden:

- Hetzelfde grondtal $\implies$ basis-eigenschappen toepassen
- Verschillend grondtal $\implies$ logaritmen nemen van termen
- Herleidbaar tot veelterm vergelijking $\implies$ substitueren door x en het veelterm oplossen
- **Opmerking:** Bij ongelijkheid met grondtal < 1 moet men teken omdraaien bij gelijke grondtallen

Logaritmische Vergelijkingen en ongelijkheden:

- Hetzelfde grondtal $\implies$ basis-eigenschappen toepassen
- Verschillend grondtal $\implies$ werk de logaritmes weg of probeer hetzelfde grondtal te krijgen
- **Opmerking:** Bij ongelijkheid met grondtal < 1 moet men teken omdraaien bij gelijke grondtallen

1.6 Reële functies (Sem-1 S7)

Voor limieten van de vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ gebruiken we de regel van l'Hôpital:

Regel van l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \vee \pm\infty \quad \text{en} \quad g'(x) \neq 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Voor andere onbepaaldheden, zoals $0 \cdot \infty$ of $\infty - \infty$, kan de regel van l'Hôpital worden toegepast door de vorm eerst aan te passen:

$$0 \cdot \infty \implies \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \quad (\text{of omgekeerd}).$$

Voor het geval $\infty - \infty \implies$ kan je door de termen op een gemeenschappelijke noemer te zetten, kan je een toepasselijke breuk krijgen: $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$.

Schuine asymptoten Voor limieten waarbij $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, kunnen we een schuine asymptoot vinden volgens:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Hiervoor gebruiken we de volgende formules van *Cauchy*:

Asymptoot-formules van *Cauchy*

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Tijdens het toepassen van deze formules kan de regel van l'Hôpital van toepassing zijn.

Euclidische deling voor rationale functies Bij een rationale functie van de vorm $\frac{f(x)}{g(x)}$, waarbij de graad van $f(x)$ precies 1 hoger is dan die van $g(x)$, kan *Euclidische deling* worden gebruikt:

Euclidische deling voor rationale functies

$$f(x) = g(x)q(x) + r \implies \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r}{g(x)}.$$

Hierbij: $-q(x)$ is een lineaire functie die de schuine asymptoot bepaalt. $-r \in \mathbb{R}$ is de rest van de deling.

Als gevolg wordt $q(x)$ de vergelijking van de schuine asymptoot.

1.7 Integralen (Sem-2 S7)

Definitie: Bepaalde integraal

De bepaalde integraal $\int_a^b f(x) dx$ stelt de oppervlakte onder de grafiek van f voor op interval $[a, b]$. Deze wordt gedefinieerd als de limiet van een som van kleine rechthoeken (Riemann-sommen):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x.$$

Het stukje dx stelt een heel kleine breedte voor. Samen met $f(x)$ (de hoogte) vormt het de oppervlakte van een smal rechthoekje. Je moet dit niet zelf kunnen uitleggen, maar het is wel belangrijk om te begrijpen waarom je altijd dx bij een integraal schrijft.

Hoofdstelling van de Integralen

Zij f een continue functie op $[a, b]$, en definieer: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Dan geeft $F(x)$ de oppervlakte onder de grafiek van f van a tot x . Deze functie F is differentieerbaar en:

$$F'(x) = f(x)$$

Dus F is een primitieve van f . Bovendien:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

De oppervlakte van een integraal is georiënteerd: Als de oppervlakte boven de x -as is, is het positief, en onder is de oppervlakte negatief. Er volgen deze basis-concepten:

Basis-concepten

- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$
- $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$
- Over een interval $[a, b]$ $g(x) \geq f(x) \implies \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$

Definitie: Onbepaalde integraal

De **onbepaalde integraal** van een functie $f(x)$ is de verzameling van alle primitieve functies van f . We noteren dit als:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad \text{waarbij } F'(x) = f(x).$$

Deze twee regels gelden ook voor onbepaalde integralen:

Basisregels voor onbepaalde integralen

- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$

Hieruit volgen de meest fundamentele integralen:

Fundamentele integralen

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (\forall n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

Gebruikmakend van algebraïsche manipulatie en de rekenregels van integralen kan men sommige integralen splitsen die geen fundamentele integralen zijn. Ook kan je bij rationale functies euclidische deling toe te passen waardoor je twee delen krijgt die makkelijker te integreren zijn.

Ander kan men bij integralen vaak de substitutiemethode gebruiken om het eenvoudiger te maken. Bij lineaire substitutie $u = ax + b$ geldt:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(u) du$$

In het algemeen kiest men een geschikte substitutie $u = g(x)$, waarna ook $du = g'(x) dx$ wordt ingevuld. Zo wordt de integraal herschreven in termen van u , wat het oplossen meestal eenvoudiger maakt (bij goede keuzes van u).

Wel is het belangrijk om op te merken dat als men de substitutie formule gebruikt op een bepaalde integraal dat men dan ook de grenzen moet aanpassen op basis van de keuze van u .

Partiële integratie

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Kies u zodat afgeleiden eenvoudiger worden, en $dv = v'(x) dx$ zodat de primitieve vlot te vinden is.

Soms moet je partiële integratie twee keer gebruiken bij cyclische integranten zoals goniometrische of exponentiële functies, waar je uiteindelijk twee integralen kan combineren.

Voor bepaalde integralen geldt:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Definitie: Oneigenlijke integralen

Oneigenlijke integraal: Een integraal waarbij de grenzen oneindig zijn of de functie onbepaald is (singulariteit) binnen het interval. Er zijn twee hoofdtypes:

- Type 1: Grenzen zijn oneindig
- Type 2: De functie heeft een singulariteit binnen het interval

In beide gevallen wordt de integraal gedefinieerd via een limiet, als die bestaat.

De eerste soort bereken je zoals gewoonlijk, maar met gebruik van limieten. Bij de tweede soort moet je de integraal splitsen rond de singulariteit, dus als er alleen een singulariteit t bestaat in het interval $[a, b]$ dan hebben we:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^t f(x) dx + \int_t^b f(x) dx \quad \text{Hier passen we weer limieten toe voor de waarden van } f(t).$$

Het is **heel belangrijk** dat je bij de tweede oneigenlijke integraal de delen splitst, als dat niet gebeurt krijg je een fout antwoord, omdat je integreert op een niet continue functie.

Toepassingen van integralen

- De *werkelijke* oppervlakte onder een curve: $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$, opgesplitst rond de nulpunten van $f(x)$.
- Oppervlakte tussen twee functies: $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$, waarbij $f(x)$ boven ligt. Ook hier splitsen rond de nulpunten van $f(x) - g(x)$.
- De lengte van een kromme: $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.
- Volume van een omwentelingslichaam rond de x -as: $\int_a^b \pi (f(x))^2 dx$.
- Manteloppervlakte van een omwentelingslichaam: $\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

2 Complexe getallen

2.1 Complexe getallen (Sem-1 S6)

Definitie: Complexe getallen

- Een complex getal is een getal van de vorm $a+bi \in \mathbb{C}$ waar $a, b \in \mathbb{R}$ en $i = \sqrt{-1}$ omdat $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$.
- Het toegevoegde van een complex getal z is $\bar{z}$ zodat als $z = a+bi \implies \bar{z} = a-bi$.
- $a+bi = c+di \implies a=c \wedge b=d$

Optellen (+), aftrekken (-), vermenigvuldigen ($\cdot$) en machten (a^n) doen we net als in $\mathbb{R}$ gebruikend dat $i^2 = -1$.

Machten van i : $i^{4k} = 1$; $i^{4k+1} = i$; $i^{4k+2} = -1$; $i^{4k+3} = -i$;

Voor deling ($\frac{a}{b}$), vermenigvuldigen we de teller en noemer door het toegevoegde van de noemer. Hiermee kunnen we ook negatieve machten ($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$) berekenen. De formule voor $(a+bi)^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

De vierkantswortel ($\sqrt{c+di}$) van een complex getal $c+di$ wordt berekend door $(a+bi)^2 = c+di$ uit te werken.

In $\mathbb{C}$ kunnen we alle oplossingen van een vierkantsvergelijking vinden, doordat we de wortel van een negatief getal (discriminant, $\sqrt{b^2-4ac}$) kunnen nemen.

Belangrijk: Een complex getal moet altijd op het einde als resultaat geen imaginair component hebben in de noemer, deze moet gereduceerd worden. (Analoog als bij wortels in de noemer).

2.2 Complexe getallen (Sem-1 S7)

Complexe getallen kan men visualiseren op een vlak (vlak van *Gauss/Argand*) met het reële component op de x-as en het imaginaire component op de y-as.

Standaard notaties voor complexe getallen

- Cartesiaans: $a+bi$
- Goniometrisch/Polair: $r(\cos \theta + i \sin \theta)$
- Exponentieel: $re^{i\theta}$

Eigenschappen van modulus en toegevoegde:

Voor een complex getal $z = a+bi$ geldt dat de modulus $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Het toegevoegde $\bar{z}$ heeft dezelfde modulus, dus $|\bar{z}| = |z|$. Verder geldt dat $\sqrt{z \cdot \bar{z}} = |z|$.

Verder geldt er:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad |z^n| = |z|^n$$

De Goniometrische schrijfwijze behalen we door: $\tan \theta = \frac{b}{a}$ en $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Rekenregels polaire coördinaten:

$\forall z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \in \mathbb{C} \implies$

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
- $z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\theta + 360^\circ \cdot k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 360^\circ \cdot k}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

De wortels van een complex getal liggen op een regelmatig n -hoek met de oorsprong als middelpunt op het complexe vlak. Er zijn n wortels, en door k te variëren tussen n waarden, krijgt men alle wortels. Het is ook op te merken dat de wortels voor k en $k + n$ gelijk zijn.

Standaard operaties in de exponentiële vorm ($z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2}, z^n, \sqrt[n]{z}$) worden via de macht regels gedaan.

3 Kansrekenen

3.1 Combinatoriek - Telproblemen (Sem-1 S6)

Terminologie:

- Ω : uitkomstverzameling $\Rightarrow A \subseteq \Omega$: gebeurtenis
- $A \cup B$: unie $A \cap B$: intersectie $\bar{A}$ of A^C : Complement
- $A \setminus B$: enkel de elementen van A die niet in B zitten

De telproblemen die we hebben gezien kunnen we categoriseren over 4 variabelen:

- Herhaling? Ja of Nee
- Volgorde belangrijk? Ja of Nee
- p : aantal posities
- n : aantal keuzemogelijkheden ($n \geq p$ geldt altijd voor gevallen zonder herhaling)

Deze vier gevallen geven de volgende formules, waar herhaling H, en volgorde V variëren ($\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$):

- H, V: $V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- H, V: $\overline{V}_n^p = n^p$
- H, V: $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$
- H, V: $\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \binom{n+p-1}{p}$

De volgende formule kan ook van gevraagd worden:

Het binomium van newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

3.2 Kansrekenen (Sem-1 S6)

De *wet van de grote aantallen* zegt dat als je iets vaak genoeg herhaalt, het gemiddelde resultaat uiteindelijk dicht bij het echte (theoretische) gemiddelde komt. Men moet de volgende diagrammen kunnen gebruiken, en maken: Venn diagram, kansboom en een kruistabel.

Formules:

- Kans op A: $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$ Aantal gevallen A gedeeld door het totaal aantal gevallen
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

De voorwaardelijke kans wordt gedefinieerd als: $P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$ (Kans op A als B)

Deze formule kan herschreven m.b.v. de regel van Bayes:

Regel van Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})}$$

Twee gebeurtenissen zijn onafhankelijk als een van de volgende waar is:

- $P(A | B) = P(A)$
- $P(B | A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4 Analytische meetkunde

4.1 Vlakke meetkunde (Sem-2 S6)

Definitie: Vector

Een **vector** is een georiënteerd lijnstuk met een grootte en richting, genoteerd als $\vec{v}$ of $\overrightarrow{AB}$.

Basis-concepten:

- Norm: $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies ||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Inproduct/Scalair product/Dot product: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$
- Middelpunt: $M = \left(\frac{x_2 + x_1}{2}; \frac{y_2 + y_1}{2} \right)$
- Lineaire afhankelijkheid: Als $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$ zijn $\vec{a}$ en $\vec{b}$ lineair afhankelijk. Als dit niet geldt zijn ze lineair onafhankelijk.
- Een normaalvector is een vector die loodrecht staat op een lijn.

Vergelijkingen van een rechte

- Vectoriele vergelijking: $y = \vec{A} + k \cdot \vec{AB}$ ($\vec{A}$ is de positievector en $\vec{AB}$ is de richtingsvector)
- Parametervergelijking: $\begin{cases} x = x_1 + a \cdot k \\ y = y_1 + b \cdot k \end{cases}$
- Cartesiaanse vergelijking: $ux + vy + w = 0 \iff \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b}$

Onderlinge ligging van twee rechten:

- **Strikt Parallel:** Richtingsvectoren zijn lineair onafhankelijk, maar er bestaat geen gemeenschappelijk punt
- **Samenvallend:** Richtingsvectoren zijn lineair onafhankelijk, en alle punten zijn gemeenschappelijk
- **Snijdend:** Richtingsvectoren zijn lineair afhankelijk

Hoek tussen twee snijdende rechten

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

-Als de waarde negatief is: dan is het de $\cos(x)$ van de stompe hoek die gevormd wordt, en viceversa hetzelfde.

-Als de waarde 0 is: zijn de rechten loodrecht/orthogonaal t.o.v. elkaar, dus $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \implies$ de rechten zijn loodrecht t.o.v. elkaar.

-De normaalvector is makkelijk af te lezen van de cartesiaanse vorm: $ux + vy + w = 0$ de normaalvector is $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, dus dan is de richtingsvector $\begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$.

Toepassingen:

- Loodrechte projectie van een punt A op een rechte l : Vind het snijpunt van l met de normaalvector van l door A .
- Afstand tussen een punt $(M : (a, b))$ en een rechte $(l : ux + vy + w = 0)$:

$$d(M, l) = \frac{|ua + vb + w|}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

- Afstand tussen twee parallelle rechten: Kies een willekeurig op een rechte en pas de vorige techniek toe met een punt en de andere rechte.

Formule van een **cirkel**: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ met (a, b) als middelpunt en straal r .

4.2 Ruimte Meetkunde (Sem-1 en 2 S7)

Afstanden en Vectoren

Hier herhalen sommige concepten zich, deze zullen korter uitgelegd worden, maar werken analoog als in 2D.

- Afstand tussen twee punten: $d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- Middelpunt: $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.
- Norm: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Scalair product: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
- Lineaire afhankelijkheid: idem als bij 2D

Rechten en Vlakken

Vergelijkingen van een rechte

- Vectoriële vergelijking: $\vec{r} = \vec{A} + r \cdot \vec{AB}, \quad r \in \mathbb{R}$.
- Parametervergelijking:
$$\begin{cases} x = x_1 + a \cdot k, \\ y = y_1 + b \cdot k, \\ z = z_1 + c \cdot k. \end{cases}$$
- Cartesiaanse vergelijking: $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$.

Vergelijkingen van een vlak

- Vectoriële vergelijking: $\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}$.
- Parametervergelijking:
$$\begin{cases} x = x_1 + sa_1 + ta_2, \\ y = y_1 + sb_1 + tb_2, \\ z = z_1 + sc_1 + tc_2. \end{cases}$$
- Cartesiaanse vergelijking: $ux + vy + wz + t = 0$.

Onderlinge ligging:

- **2 rechten:**
 - Strikt parallel: Geen gemeenschappelijk punt. (Dezelfde richtingsvectoren)
 - Samenvallend: Alle punten gemeenschappelijk. (Dezelfde richtingsvectoren)
 - Snijdend: Eén gemeenschappelijk punt. (Verschillende richtingsvectoren)
 - Kruisend: Geen gemeenschappelijk punt. (Verschillende richtingsvectoren)
- **2 vlakken:**
 - Parallel: Geen gemeenschappelijk punt. (Dezelfde normaalvectoren)
 - Samenvallend: Alle punten gemeenschappelijk. (Dezelfde normaalvectoren)
 - Snijdend: Snijlijn bestaat. (Verschillende normaalvectoren)
- **Rechte en een vlak:**
 - Snijdend: Eén gemeenschappelijk punt. ()
 - Parallel: Geen gemeenschappelijk punt. (Normaalvector van vlak en richtingsvector zijn loodrecht)
 - Rechte ligt in het vlak: Alle punten gemeenschappelijk. (Normaalvector van vlak en richtingsvector zijn loodrecht)

Vectorieel Product/Kruisproduct

- Kruisproduct (Het kruisproduct van twee vectoren staat loodrecht op het vlak dat de twee vectoren vormen):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}.$$

- Oppervlakte parallellogram gevormd door $\vec{a}$ en $\vec{b} = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$
- Oppervlakte driehoek gevormd door $\vec{a}$ en $\vec{b} = \frac{1}{2} \|\vec{a} \times \vec{b}\|$
- Volume parallellepipedum gevormd door $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

Toepassingen

- Normaalvector van een vlak: $ux + vy + wz + t = 0 \implies \vec{n}(u, v, w)$.
- Orthogonale projectie van een punt op een vlak: Snijpunt van het vlak met een lijn door het punt en normaalvector.
- Loodvlak door een punt van een rechte: Vlak door dat punt met de rechte als normaalvector.

Afstanden

- Afstand punt tot vlak: $d = \frac{|ux_1 + vy_1 + wz_1 + t|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$.
- Afstand tussen twee evenwijdige rechten $\implies$ kies een willekeurig punt op een van de twee rechten en pas dan de formule toe van afstand van een punt tot een rechte
- Afstand tussen twee evenwijdige vlakken, analoog als hierboven
- Afstand tussen twee kruisende rechten: $d(l_1, l_2) = \frac{|\vec{A_1 A_2} \cdot (\vec{u_1} \times \vec{u_2})|}{|\vec{u_1} \times \vec{u_2}|}$

Hoeken

- Hoek tussen twee vectoren: $\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.
- Hoek tussen rechte en vlak: Bereken de hoek tussen de normaalvector van het vlak en de richtingsvector, dan is het complement het gevraagde
- Hoek tussen twee vlakken: Hoek tussen de respectieve normaalvectoren

Formule van een bol: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ met (a, b, c) als middelpunt en straal r

5 Rijen

5.1 Rijen (Sem-2 S6)

Definitie: Rij

Een sequentie getallen in een bepaalde volgorde wordt een **rij** genoemd. Elk getal is een term die genoteerd wordt als u_n waar het index het **volgnummer** is.

Soorten voorschriften

- **Direct/expliciet:** $u_n = f(n)$ (Er bestaat een directe formule voor elk term)
- **Rekursief:** $u_n = f(u_{n-1}, (u_{n-2}, \dots))$ (Afhankelijk van de voorafgaand(e) term(en))
 - Voor een recursief voorschrift moet men altijd de *startterm* geven. (Een recursief voorschrift kan ook dubbel recursief zijn (of meer), zoals de Fibonacci rij.)

Als een rij stijgend of dalend is noemen we het **monotoon**, dit geeft ons de volgende gevallen ($\forall n \in \mathbb{N}$):

- Stijgend: $u_{n+1} \geq u_n$ of $f'(n) \geq 0$
- Strikt stijgend: $u_{n+1} > u_n$ of $f'(n) > 0$
- Dalend: $u_{n+1} \leq u_n$ of $f'(n) \leq 0$
- Strikt dalend: $u_{n+1} < u_n$ of $f'(n) < 0$

De waarde van de limiet van een rij kan ook beschreven worden:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c, \quad c \in \mathbb{R} \implies$ De rij **convergeert**
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c, \quad c = \pm\infty \implies$ De rij **divergeert**

Het gedrag van de rij bepalen we door de limiet te berekenen voor $n = \infty$ (expliciet), of het gebruik van een web-grafiek (recursief, *via NumWorks*).

5.2 Rekenkundige en Meetkundige rijen (Sem-1 S7)

Definitie: RR en MR

- Een **rekenkundige rij** (RR) is een rij waarbij het verschil tussen twee opeenvolgende termen steeds constant is.
- Een **meetkundige rij** (MR) is een rij waarbij de verhouding tussen twee opeenvolgende termen steeds constant is.

Voorschriften

- RR recursief: $u_n = u_{n-1} + v$ en Startterm
- RR expliciet: $u_n = u_1 + (n-1) \cdot v$ En algemeen: $u_n = u_k + (n-k) \cdot v$
- MR recursief: $v_n = v_{n-1} \cdot q$ en Startterm
- MR expliciet: $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$ En algemeen: $v_n = v_k \cdot q^{n-k}$

Algemeen hebben we ook de volgende formules:

- RR som van eerste n termen: $n \cdot \frac{u_1 + u_n}{2}$
- MR som van eerste n termen: $v_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$

Convergenties en divergenties:

- RR, en de somrij van een RR divergeren altijd
- MR convergeert naar 0 als en slechts als $-1 < q < 1$
- MR convergeert naar een constant getal als en slechts als $q = 1$
- MR divergeert als en slechts als $|q| > 1$
- MR somrij convergeert als en slechts als $-1 < q < 1$, de waarde hiervan is: $\frac{v_1}{1-q}$

6 Statistiek (geen wiskunde)

6.1 Discrete Kansmodellen (Sem-2 S6)

Definitie: Basis definities

- **Kansmodel:** Een wiskundig model om experimenten waar toeval een rol speelt te voorspellen.
- **Discreet:** Bestaat uit losse, afzonderlijke waarden, bijvoorbeeld $\mathbb{N}$.
- **Continu:** Kan elke waarde binnen een interval aannemen, bijvoorbeeld $\mathbb{R}$.
- **Stochast:** Een variabele die willekeurige waarden aanneemt volgens een kansverdeling.
- De discrete stochast X neemt waarden $x_1, x_2, \dots, x_n$ aan met kansen $p_i = P(X = x_i)$, waarbij $p_i \geq 0$ en $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Essentiële concepten in statistiek

Verwachtingswaarde: $E[X] = \mu_X = \sum_{i=1}^n x_i p_i$.

Variantie: $Var(X) = \sigma_X^2 = E[(X - \mu_X)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu_X^2$.

Standaardafwijking: $\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - \mu_X^2}$

(Voor variantie is de tweede formule makkelijker te gebruiken in mijn opinie.)

Specifieke discrete kansverdelingen:

- **Uniform:** $i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow x_i = x_j$, oftewel alle x_i zijn gelijk. (Formules volgen meteen.)
- **Bernoulli:** succes p , of mislukking $q = 1 - p$. $x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow \mu_X = p, \sigma_X^2 = pq$
- **Binomiale verdeling:** Herhaalde Bernoulli: $X \sim (n, p)$ waar n het aantal keer is, en p de succeskans. $P(X = x_i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$. $\mu_X = np, \sigma_X^2 = npq$.
- **Binomiale benadering:** Een binomiale verdeling kan bij grote steekproeven benaderd worden door een normale verdeling.

6.2 Bivariate Statistiek (Sem-1 S7)

Definitie: Bivariate statistiek

Bivariate statistiek bestudeert de relatie tussen twee continue variabelen, vaak weergegeven als een puntenwolk. In de praktijk gaat het om steekproefgegevens, waardoor de variabelen niet echt continu zijn zoals in continue kansmodellen, maar discreet gemeten.

In een puntenwolk kunnen we de volgende karakteristieken van een bivariate continue kansverdeling opmerken.

- Opwaartse trend: Globaal stijgt y als x stijgt
- Neerwaartse trend: Globaal daalt y als x stijgt
- Lineaire samenhang: Een relatie tussen twee variabelen die wordt beschreven door een rechte lijn.

In een puntenwolk definiëren we ook een typische rechte, die zich zo goed mogelijk aansluit bij het puntenwolk.

- Gaat door $[\bar{x} - 2s_x; \bar{x} + 2s_x]$ en $[\bar{y} - 2s_y; \bar{y} + 2s_y]$ (Twee standaardafwijkingen af van het gemiddelde)
- Positieve samenhang: $(y - \bar{y}) = \frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$
- Negatieve samenhang: $(y - \bar{y}) = -\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x})$

Bij lineaire samenhang ontstaat meestal een ellipsvormige spreiding, waarbij de lengte de richting van de rechte aangeeft en de breedte de sterkte van de samenhang. Deze kan een van de volgende zijn:

- Zwak
- Matig
- Sterk
- Perfect

$$(|r| = 1)$$

De sterkte kan numeriek bepaald worden door het *correlatiecoëfficiënt* r , maar is niet exact en het is afhankelijk van de context die juist geïnterpreteerd moet worden.

Z-score: $z_x = \frac{x - \bar{x}}{s_x}$ Dit is een maatstaf voor de afwijking tot het gemiddelde van een invoerwaarde, hoe groter hoe verder van het gemiddelde.

Om een puntenwolk algemeen te analyseren, standaardiseren we het model. Dit doen we door alle waarden te vervangen door hun Z-scores. Bij positieve samenhang is de eerste bissectrice de typische rechte ($y = x$), en bij negatieve de tweede bissectrice ($y = -x$). De correlatiecoëfficiënt van een kansverdeling wordt berekend voor een gestandaardiseerd model:

Definitie: Correlatiecoëfficiënt r

De **correlatiecoëfficiënt** is een maat voor hoe sterk twee variabelen lineair met elkaar samenhangen. Het geeft aan of een verandering in de ene variabele gepaard gaat met een consistente verandering in de andere.

Het correlatiecoëfficiënt r wordt berekend door: $r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \cdot \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_{x_i} \cdot z_{y_i})$

Correlatiecoëfficiënt r interpreteren

De **correlatiecoëfficiënt** r meet de sterkte en richting van de lineaire relatie tussen twee variabelen. Het varieert tussen -1 en 1:

- $r > 0 \Rightarrow$ Positieve correlatie, de variabele stijgen samen
- $r < 0 \Rightarrow$ Negatieve correlatie, de ene daalt als de andere stijgt
- Hoe dichter $|r|$ bij 1 ligt, hoe sterker de correlatie, en wanneer $|r|$ dicht bij 0 ligt, is de correlatie zwakker.

Wat precies als een "hoge", "matige" of "lage" correlatie wordt beschouwd, hangt af van de context. Met de juiste uitleg en intuïtie in relatie tot de context kan een zinvolle conclusie worden getrokken.

Definitie: Regressielijn

De **regressielijn** is de lijn die de best passende lineaire relatie tussen twee variabelen beschrijft. Deze lijn minimaliseert de som van de gekwadrateerde verticale afstanden (residuen) tussen de punten en de lijn.

De regressielijn wordt gebruikt voor zowel *interpolatie* (voorspellen van waarden binnen het bereik van de data) als *extrapolatie* (voorspellen van waarden buiten het bereik van de data).

Een *residuplot* toont de residuen van de regressieanalyse en helpt bij het identificeren van afwijkingen of verkeerde aannames in het model.

Uitschieters kunnen de correlatiecoëfficiënt sterk beïnvloeden, dus controleer altijd de puntenwolk voor anomalieën. **Correlatie** impliceert niet noodzakelijkerwijs **oorzakelijk verband** — bijvoorbeeld, een hogere temperatuur kan samengaan met meer ijsjes eten, maar dat betekent niet dat de temperatuur de oorzaak is van het ijsjes eten. Wees voorzichtig met *nonsens-samenhangen* en gebruik gezond verstand. Een geringe correlatie sluit geen andere soorten samenhangen uit.

Een exponentieel verband $y = a \cdot b^x$ kan lineair worden gemaakt door beide zijden te logaritmeren:

$$\ln(y) = \ln(a) + x \cdot \ln(b).$$

Dit maakt een lineaire relatie tussen $\ln(y)$ en x , die met een regressielijn kan worden geanalyseerd.

6.3 Continue Kansmodellen (Bijna wiskunde) (Sem-2 S7)

Definitie: Continue Toevalsveranderlijke

Een **continue toevalsveranderlijke** is een veranderlijke die alle reële waarden binnen een interval kan aannemen, volgens een bepaalde **kansdichtheidsfunctie** $f(x)$, waarbij geldt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad \text{met} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Hierbij volgen de volgende formules:

$E[X]$, $Var(X)$, σ_x

- $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$
- $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x) f(x) dx$
- $\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x) f(x) dx}$

En de volgende rekenregels (de gevallen voor standaardafwijking volgen triviaal vanuit $Var(X)$):

Rekenregels

- $E[X + a] = E[X] + a$
- $E[aX] = aE[X]$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$
- $Var(X + a) = Var(X) \quad \sigma_{X+a} = \sigma_X$
- $Var(aX) = a^2 \cdot Var(X) \quad \sigma_{aX} = |a| \cdot \sigma_X$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) \quad \sigma_{X+Y} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}$

Definitie: Uniforme continue verdeling

Gedefinieerd op interval $[a, b]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (x > b) \end{cases}$$

Er volgt dat $E[X] = \frac{a+b}{2}$, $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$ en $\sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$.

Definitie: Normaalverdeling

De **normaalverdeling** is een continue kansverdeling met een klokvormige, symmetrische curve rond het gemiddelde μ en een standaardafwijking σ . De dichtheidsfunctie is:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Het gemiddelde is gelijk aan de verwachtingswaarde, en het buigpunt van de curve ligt op afstand σ van het gemiddelde af. Dit wordt ook wel de *Gaussverdeling* genoemd.

Regel van 68-95-99,7

Bij een normaalverdeling geldt (afgerond):

- $\mu \pm 1\sigma$: ongeveer 68% van de waarden
- $\mu \pm 2\sigma$: ongeveer 95% van de waarden
- $\mu \pm 3\sigma$: ongeveer 99,7% van de waarden

Een normaalverdeling noteren we als $X \sim N(\mu; \sigma)$, waarbij μ het gemiddelde is en σ de standaardafwijking. Het gemiddelde bepaalt het middelpunt van de curve, terwijl de standaardafwijking aangeeft hoe "plat" de curve is — hoe groter σ , hoe vlakker de verdeling.

We kunnen een normaalverdeling ook standaardiseren door $Z \sim N(0; 1)$ te beschouwen, waarbij Z de *z-score* is. Dan is Z **standaardnormaal** verdeeld. Dit is nuttig bij het oplossen van vergelijkingen waarin het gemiddelde en/of de standaardafwijking onbekend zijn, maar wel kansen zoals $P(X \leq a) = p$ gegeven zijn. Door te standaardiseren vinden we de bijbehorende *a*-waarden voor Z , waardoor het probleem herleid wordt tot een lineair systeem van vergelijkingen.

7 Extra

Hier staat een meer formele uitleg (**compleet niet nodig voor het Bacc**) en een video van de Universiteit van Toronto die het visueel goed uitlegt. Dit kan mogelijk meer intuïtie geven op hoe een integraal werkt.

Definitie: Bepaalde integraal

De oppervlakte onder een continue functie op een gesloten interval $[a, b]$ kan bepaald worden met behulp van een integraal.

We verdelen het interval $[a, b]$ in n gelijke deelintervallen van lengte $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ en nemen de punten

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad \dots, \quad x_n = b.$$

Voor elke subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ bepalen we:

- $m_i = \min\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ (kleinste functiewaarde)
- $M_i = \max\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ (grootste functiewaarde)

De **onderbenadering** van de oppervlakte wordt gegeven door de som:

$$s_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x$$

en de **bovenbenadering** door:

$$S_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x.$$

Als f continu is op $[a, b]$, dan geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = I.$$

We noemen dit gemeenschappelijk limiet de **bepaalde integraal** van f over $[a, b]$, en noteren:

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Het $\int$ -symbool is een gestileerde S , die staat voor “som”. De uitdrukking dx duidt aan dat de som wordt genomen over stukjes van breedte Δx .

Hier vind je een korte uitleg over de [Riemann sommen](#) van de Universiteit van Toronto.